星图 - 代数篇

随记

1. 二阶矩阵特征值

对于 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, 令

$$\begin{cases} m = \dfrac{a+d}{2} = \dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2} \\ p = ad - bc = \lambda_1\lambda_2 \end{cases}$$

则 $\lambda = m \pm \sqrt{m^2 - p}$.

2. Bezout 法巧解矩阵问题

例 1 ⭐

对于多项式 $f(x), g(x)$, 有 $f(A) = O$, 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素 (无公共根), 证明 $g(A)$ 可逆.

证明:

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$
$$v(A)g(A) = E$$

例 2 ⭐

$g(A)$ 可逆 $\Leftrightarrow (f_A(x), g(x)) = 1$.

注意到特征多项式满足 $f_A(A) = O$.

例 3 ⭐

设 $A \in P^{n\times n}$, $f(x), g(x) \in P[x]$, 且 $f(A) = O$, 则

$$g(A) \text{ 可逆} \Leftrightarrow (d(x), m_A(x)) = 1.$$

例 4 ⭐

若 $\prod\limits_{i=1}^{n} f_i(A) = O$, 且 $f_i(x)$ 两两互素 $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{rank}(f_i(A)) = n.$$

对于 $n = 2$ 的情况, 由裴蜀定理可证. 对于 $n = 3$ 且 $f_i(x)$ 中至少有两个一次多项式的情况, 用裴蜀定理能证, 但比较繁琐, 不如硬分类讨论. 对于一般情况, 可以利用裴蜀定理推出 $\operatorname{rank}(f(A)) + \operatorname{rank}(g(A)) = n + \operatorname{rank}(f(A)g(A))$ (详见这里), 并通过数学归纳法证明.

3. 矩阵的逆

1. 二阶矩阵 通过 **伴随矩阵** 求逆:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

2. 准对角矩阵 通过 **分块** 求逆:

$$\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & \\ & A_4^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & A_2 \\ A_3 & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & A_2^{-1} \\ A_3^{-1} & \end{pmatrix}$$

3. 利用 **形式幂级数** 求逆:

$$(E+BA)^{-1} = E - B(E+AB)^{-1}A$$

4. 矩阵的秩

1. 利用矩阵 **同解** 证明:

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}\left(AA^{\mathrm{T}}\right) = \mathrm{r}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)$$

2. 若 x 是列向量, 则 xx^{T} 是对称矩阵, 且

$$\mathrm{r}\left(xx^{\mathrm{T}}\right) = 1$$
$$\mathrm{r}(E - xx^{\mathrm{T}}) = n-1$$

3. 利用 $Frobenius$ **不等式** 证明:

$$\mathrm{r}(A^2) = \mathrm{r}(A) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{r}(A^p) = \mathrm{r}(A), p \in N$$

4. 证明:

$$\mathrm{r}(A^n) = \mathrm{r}(A^{n+1})$$

即证 $A^{n+1}X=0$ 的解也是 $A^nX=0$ 的解.

若 $\alpha \neq 0, A^{n+1}\alpha = 0, A^n\alpha \neq 0$, 作 $k_0\alpha + k_1A\alpha + \cdots + k_nA^n\alpha = 0$,

用 A^n 左乘上式, 得 $k_0=0$, 代入后用 A^{n-1} 继续左乘, 以此类推, 知 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^n\alpha$ 线性无关, 即有 $n+1$ 个 n 维向量线性无关, 矛盾, 故原式成立.

5. 椭圆面积

$$
\begin{gathered}
f(x, y)=a x^2+b x y+c y^2=1 \\
\lambda^2-(a+c) \lambda+a c-\frac{b^2}{4}=0 \\
\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2=1 \\
S=\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}=\frac{2 \pi}{\sqrt{-\Delta}}
\end{gathered}
$$

6. 行列式计算专题

例 1 求下列行列式

$$
D_n=|A|=\left|\begin{array}{cccc}
a_1^2 & a_1 a_2+1 & \cdots & a_1 a_n+1 \\
a_2 a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2 a_n+1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_n a_1+1 & a_n a_2+1 & \cdots & a_n^2
\end{array}\right|
$$

解答

设

$$
\begin{gathered}
B=\left(\begin{array}{cccc}
a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\
1 & 1 & \cdots & 1
\end{array}\right)^{\prime} \\
C=\left(\begin{array}{cccc}
a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\
1 & 1 & \cdots & 1
\end{array}\right)
\end{gathered}
$$

则

$$
\begin{aligned}
A & =B C-E \\
D_n & =(-1)^2\left|E_n-B C\right| \\
& =(-1)^n\left|E_2-C B\right| \\
& =(-1)^n\left|\begin{array}{cc}
1-\sum_{i=1}^n a_i^2 & -\sum_{i=1}^n a_i \\
-\sum_{i=1}^n a_i & 1-n
\end{array}\right|
\end{aligned}
$$

7. 矩阵方程

例 1 设 $A, B, X \in M_n(\mathbb{P})$, 其中 A, B 的特征值不同, f_A, f_B 为特征多项式, 证明

1. $f_A(B)$ 可逆;
2. 存在 $0 \neq g(x), h(x) \in \mathbb{P}[x]$, 使得 $g(B) f_A(B)=O,\ h(A) f_B(A)=O$;
3. $A X-X B=O$ 只有零解;
4. $A X-X B=C$ 有唯一解 (**Sylvester 方程**).

证明

1. 由 Bezout 法: $u(x) f_A(x)+v(x) f_B(x)=1$,

代入 A, 知: $(f_B(A))^{-1}=v(A)$,

同理, 有: $(f_A(B))^{-1}=u(B)$.

2. 分别取 $g(x),h(x)$ 为 B,A 的零化多项式即可.
3. $AX=XB \Rightarrow A^kX=XB^k \Rightarrow f(A)X=Xf(B)$.

   故 $f_B(A)X=Xf_B(B)=O$, 其中 $f_B(A)$ 可逆, 故 $X=O$.
4. 定义变换 φ:

$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{P}) &\to M_n(\mathbb{P}) \\ X &\mapsto AX-XB \end{aligned}$$

   易知 φ 是 $M_n(\mathbb{P})$ 内的一个线性变换.

   已证 $AX-XB=O$ 只有零解, 故 φ 是单射. 由

$$\dim(\ker\varphi)+\dim(\mathrm{Im}\varphi)=\dim(M_n(\mathbb{P}))$$

   及 $\dim(\ker\varphi)=0$ 知, φ 是满射. 于是 φ 是同构映射, 从而是可逆映射.

   注: 有限维线性空间中, 单射 $\Leftrightarrow$ 满射.

   由 $\varphi(X)=AX-XB=C$ 两边用 φ 作用, 即有 $X=\varphi^{-1}(C)$, 故方程有唯一解.

例 2 设 A,B 是 n 阶实方阵, 记 $\mathbb{R}$ 上矩阵方程 $AX+XA=B$ 为 $(^*)$. $B\neq O$, 且 $(^*)$ 有解, 证明: 存在 $(^*)$ 的解 $X_1,X_2,\cdots,X_s$, 使得对 $(^*)$ 的任意解 X, 都有 $X=\sum\limits_{i=1}^{s}k_iX_i$, 其中 $k_i\in\mathbb{R}$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{s}k_i=1$.

定义: **Kronecker 积**

> 如果 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $p\times q$ 矩阵, 则 A 与 B 的 **Kronecker 积** 是 $mp\times nq$ 分块矩阵, 记为 $A\otimes B$, 读作 "A 张量 B", 且
>
> $$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

证明

设 $A=(a_{ij}),X=(x_{ij}),B=(b_{ij})$, 则

$$(E\otimes A+A'\otimes E)\operatorname{vec}(X)=\operatorname{vec}(B),$$

其中 $\operatorname{vec}X=(x_{11},\cdots,x_{n1},\cdots,x_{1n},\cdots,x_{nn})'$.

设 γ_0 是一特解, $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{s-1}$ 是其导出组的一个基础解系, 令 $\gamma_i=\gamma_0+\eta_i$, $i=1,2,\cdots,s-1$, 则任一解 γ 可表示为

$$\gamma=k_1\gamma_0+k_2\gamma_1+\cdots+k_s\gamma_{s-1},$$

其中 $k_i\in\mathbb{R}$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{s}k_i=1$.

定义: **Kronecker 和**

$$A' \oplus A \equiv E \otimes A + A' \otimes A.$$

- $Kronecker$ 积是 **张量积** 的特殊形式.

8. 循环矩阵

例 1 证明：在复数域上，存在可逆矩阵 P,使得对任意的 $a_i \in \mathbb{C}(i=1,2,\cdots,n-1)$, 都有 $P^{-1}BP$ 为对角矩阵, 其中

$$B=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

定义: **基本循环矩阵**

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 循环矩阵是特殊的 **Toeplitz 矩阵**.
- 循环矩阵可由基本循环矩阵的方幂线性表出.
- B 的生成多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}.$$

- A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\lambda^n-1.$$

特征值 $\epsilon_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2k\pi}{n}\neq 0$, 故 A 可相似对角化,

- 且任意 B 的特征向量均为

$$\begin{cases} X_0=(1,1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}, \\ X_1=(1,\epsilon_1,\epsilon_1^2,\cdots,\epsilon_1^{n-1})^{\mathrm{T}}, \\ X_2=(1,\epsilon_2,\epsilon_2^2,\cdots,\epsilon_2^{n-1})^{\mathrm{T}}, \\ \cdots\cdots \\ X_{n-1}=(1,\epsilon_{n-1},\epsilon_{n-1}^2,\cdots,\epsilon_{n-1}^{n-1})^{\mathrm{T}}. \end{cases}$$

- 任意 B 的相似变换矩阵均为

$$P=\begin{pmatrix} \epsilon_0 & \epsilon_1 & \epsilon_2 & \cdots & \epsilon_{n-1} \\ \epsilon_0^1 & \epsilon_1 & \epsilon_2 & \cdots & \epsilon_{n-1} \\ \epsilon_0^2 & \epsilon_1^2 & \epsilon_2^2 & \cdots & \epsilon_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \epsilon_0^{n-1} & \epsilon_1^{n-1} & \epsilon_2^{n-1} & \cdots & \epsilon_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \epsilon_1 & \epsilon_2 & \cdots & \epsilon_{n-1} \\ 1 & \epsilon_1^2 & \epsilon_2^2 & \cdots & \epsilon_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \epsilon_1^{n-1} & \epsilon_2^{n-1} & \cdots & \epsilon_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1}BP=\operatorname{diag}(f(1),f(\epsilon_1),f(\epsilon_2),\cdots,f(\epsilon_{n-1})).$$

9. Jordan 块开平方

image-20220630231435631

image-20220630231457685

- 幂级数的未定元, 只有当代入矩阵后得到的矩阵的特征值均落在幂级数的收敛半径中时, 才是有意义的, 否则只是形式幂级数.

10. 判断矩阵对角化

定理

> 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 则 A 可对角化的充要条件是 A 的最小多项式没有重根.

- 若特征多项式 (零化多项式) 没有重根, 则 A 可对角化.

例 1 设 A 是 n 阶复矩阵, 且存在正整数 m, 使得 $A^m = E$, 求证 A 与对角阵相似.

证明 零化多项式 $f(x) = x^m - 1$ 无重根, 故可相似对角化.

例 2 设 $n(n>1)$ 阶方阵 A 满足 $A^2 - 5A + 6E = O$, 求证 A 相似于对角矩阵. 如果 A 的行列式等于 $2^m 3^{n-m}$, $0 < m < n$, $m \in \mathbb{N}^+$, 求相似对角矩阵.

解 A 的特征值只有 2 和 3, 故 $A \sim \operatorname{diag}(2E_m, 3E_{n-m})$.

例 3 设 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}, Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}, \alpha = Y'X, A = E + XY'$.

1. 若 $\alpha \neq -1$, 求证: A 可逆;
2. 若 $\alpha = -1$, 求证: A 相似于对角阵.

解

1. 由 $A^2 = (2+\alpha)A - (1+\alpha)E$ 易知 $A^{-1} = \dfrac{(2+\alpha)E - A}{1+\alpha}$.
2. $A^2 = A$, 故最小多项式无重根, A 与对角阵相似.

例 4 设 X, Y 分别为 $m \times n$ 和 $n \times m$ 矩阵, $YX = E_n,\ A = E_m + XY$. 求证: A 相似于对角矩阵.

解 同理易证.

11. 同时上三角化

例 1 ⭐ 设 A, B 都是 n 阶复矩阵, 满足 $AB = BA$, 求证: 存在 n 阶可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵.

- 矩阵可交换, 则有公共的特征向量. 数归可证.
- 矩阵与伴随矩阵可交换.

例 2 设 A 为幂零矩阵, B 为实可逆矩阵, 求证:

1. $|A+E|=1$;
2. 若 $AB=BA$, 则 $|A+B|=|B|$.

证明

1. 幂零矩阵的特征值都是 0. 利用 Jordan 标准形可证.
2. $|A+B|=\left|P^{-1}(A+B)P\right|=\left|P^{-1}AP+P^{-1}BP\right|=\left|P^{-1}BP\right|=|B|$.

12. 根与不可约性

例 1 设 $f(x)=x^7+7x^2+1$, 证明:

1. $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约;
2. $f(x)$ 至少存在一个实根 α;
3. $\forall\beta\in\mathbb{Q},\ \exists u(x)\in\mathbb{Q}[x],\ \mathrm{s.t.}\ u(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-\beta}$.

解

1. 作平移变换 $x=y-1$, 用 Eisenstein 判别法.
2. 奇数次多项式必有实根.
3. $u(x)(x-\beta)+v(x)(x^7+7x^2+1)=1$.

13. Frobenius 矩阵

定义

> 对数域 $\mathbb{P}$ 上的一个多项式 $d(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n$, 称矩阵
>
> $$A=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-a_n\\1&0&\cdots&0&-a_{n-1}\\0&1&\cdots&0&-a_{n-2}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-a_1\end{pmatrix}$$
>
> 称为多项式 $d(\lambda)$ 的 **伴侣阵** (或 **友阵**、**Frobenius 矩阵**).

- A 的特征多项式是 $d(\lambda)$
- 不变因子是 $1,\cdots,1,d(\lambda)$, 特征多项式恰好为最小多项式.

例 1 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是多项式 $f(x)=x^3+x^2+x-1$ 的根, $g(x)=x^2+x+1$, 求一个以 $g(\lambda_1),g(\lambda_2),g(\lambda_3)$ 为根的有理系数多项式 $p(x)$.

解

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix},\quad g(A)=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},$$
$$p(x)=|\lambda E-g(A)|=\lambda^3-\lambda^2-\lambda-1.$$

14. 秩 1 矩阵的性质

命题

> 对任意 $A \in M_n(\mathbb{P})$, 则 $\mathrm{r}(A) = 1$ 当且仅当存在两个非零列向量 α, β, 使得 $A = \alpha\beta^{\mathrm{T}}$.

推论　对于秩 1 矩阵 A,

- 其特征值为 $0, \cdots, 0, \mathrm{tr}(A)$.
- $A^k = \mathrm{tr}\,(A)^{k-1}A$.
- 若 $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, 则 A 可相似对角化.

注: 注意到 $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$, 设 $f(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A)x$, 则 $f(x)$ 是 A 的零化多项式. 最小多项式整除 $f(x)$, 故没有重根, 即 A 与对角矩阵性阿斯.

15. 覆盖定理

例 1 证明: 数域 $\mathbb{P}$ 上的有限维线性空间 V 不能被它的有限个真子空间覆盖, 即不存在真子空间 $V_1, V_2, \cdots, V_m$, 使得 $V \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_m$.

注: 若 $\mathbb{P}$ 是有限域, 则其上的线性空间总可以表示成有限个真子空间的并.

例 2 设 A 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 对于 $v \in V$, 记 $m_v(x)$ 为使得 $m_v(A)v = 0$ 成立的次数最低的首一多项式, 这个多项式也叫做 v 的最小多项式. 证明: 存在 $v \in V$, 使得 v 的最小多项式 $m_v(x)$ 恰好等于 A 的最小多项式 $m(x)$.

16 Test for Divisibility

Let n be an integer with decimal representation $a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$.

Divisor	Test Method
2	$2 \mid a_0$.
3	$3 \mid a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0$.
4	$4 \mid a_1 a_0$.
5	$5 \mid a_0$.
6	Divisible by both 2 and 3.
7	$7 \mid a_2a_1a_0 - a_5a_4a_3 + \cdots$.
8	$8 \mid a_2a_1a_0$.
9	$9 \mid a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0$.
10	$a_0 = 0$.
11	$11 \mid a_0 - a_1 + a_2 - \cdots (-1)^k a_k$.
12	Divisible by both 3 and 4.

Divisor	Test Method
13	$13 \mid a_2a_1a_0 - a_5a_4a_3 + \cdots.$

基础概念

1. 行列式

$$
\begin{aligned}
|kA| &= k^n |A| \\
|AB| &= |A|\,|B|
\end{aligned}
$$

若 $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$，$B \in \mathbb{R}_{m\times n}$，$\lambda \neq 0$，则:

$$
\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} = |E_n - AB| = |E_m - BA|
$$

$$
|\lambda E_n - AB| = \lambda^{n-m} |\lambda E_m - BA|
$$

若 A, B, C, D 都是 n 阶矩阵，$C = A^{-1}CA$，则

$$
\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|
$$

2. 共轭矩阵

$$
\begin{aligned}
\overline{A+B} &= \overline{A} + \overline{B} \\
\overline{\lambda A} &= \overline{\lambda} * \overline{A} \\
\overline{AB} &= \overline{A} * \overline{B}
\end{aligned}
$$

3. 转置矩阵

$$
\begin{aligned}
(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} &= A \\
(A+B)^{\mathrm{T}} &= A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}} \\
(kA)^{\mathrm{T}} &= kA^{\mathrm{T}} \\
(AB)^{\mathrm{T}} &= B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \\
\left|A^{\mathrm{T}}\right| &= |A|
\end{aligned}
$$

4. 逆矩阵

$$
\begin{aligned}
\left(A^{-1}\right)^{-1} &= A \\
\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} &= \left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \\
(AB)^{-1} &= B^{-1} A^{-1} \\
\left|A^{-1}\right| &= |A|^{-1}
\end{aligned}
$$

5. 伴随矩阵

$$
\begin{aligned}
AA^* &= |A|E \\
A^* &= |A|A^{-1} \\
|A^*| &= |A|^{n-1} \\
(kA)^* &= k^{n-1}A^* \\
\left(A^{-1}\right)^* &= (A^*)^{-1} = |A|^{-1}A \\
\left(A^{\mathrm{T}}\right)^* &= (A^*)^{\mathrm{T}} \\
(AB)^* &= B^*A^*
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{r}(A^*) = \begin{cases} n, & \mathrm{r}(A) = n, \\ 1, & \mathrm{r}(A) = n-1, \quad (n \geq 2) \\ 0, & \mathrm{r}(A) < n-1. \end{cases}
$$

其中 $(AB)^* = B^*A^*$ 可用 **扰动法** 证明

6. m 重伴随矩阵

定义: $A^{(m^*)} \equiv \underbrace{(\cdots((A^*)^*)\cdots)^*}_{\text{共 } m \text{ 重括号}}.$

由 $A^{((2m)^*)}A^{((2m+1)^*)} = \left|A^{((2m)^*)}\right|E$ 及数学归纳法知:

$$
A^{(m^*)} = \begin{cases} |A|^{\frac{(n-1)^m+1}{n}}A^{-1}, & m\text{是奇数} \\ |A|^{\frac{(n-1)^m-1}{n}}A, & m\text{是偶数} \end{cases} \quad (m, n \in \mathbb{N}^+)
$$

$$
\begin{aligned}
\left|A^{(m^*)}\right| &= |A|^{(n-1)^m} \\
(kA)^{(m^*)} &= k^{(n-1)^m}A^{(m^*)} \\
\left(A^{-1}\right)^{(m^*)} &= \left(A^{(m^*)}\right)^{-1} \\
\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{(m^*)} &= \left(A^{(m^*)}\right)^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(AB)^{(m^*)} &= \begin{cases} B^{(m^*)}A^{(m^*)}, & m\text{是奇数} \\ A^{(m^*)}B^{(m^*)}, & m\text{是偶数} \end{cases} \\
\mathrm{r}\left(A^{(m^*)}\right) &= \begin{cases} n, & \mathrm{r}(A) = n, \\ 1, & \mathrm{r}(A) = n-1, m = 1, \\ 0, & \mathrm{r}(A) = n-1, m > 1 \quad \text{或} \quad \mathrm{r}(A) < n-1 \end{cases} \qquad (n \geq 2)
\end{aligned}
$$

7. 秩不等式

$$
\begin{gathered}
\mathrm{r}(AB) \leq \mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}(A, B) \\
\mathrm{r}(AB) + \mathrm{r}(BC) \leq \mathrm{r}(ABC) + \mathrm{r}(B) \\
\mathrm{r}(A+B) \leq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B) \leq n + \mathrm{r}(AB)
\end{gathered}
$$

8. 半单矩阵

即最小多项式无重根的矩阵. 最小多项式即第 n 个不变因子, 也是其它不变因子的倍式, 因此由不变因子分解得到的初等因子也都是一次因式, 故对应的 Jordan 块也都是一阶的, Jordan 阵即为对角阵, 故半单矩阵可相似对角化.

8.1 三角矩阵

- 上三角矩阵与上三角矩阵的乘积仍为上三角矩阵;
- 上三角矩阵的逆矩阵仍为上三角矩阵.

8.2 幂零矩阵

$A^m = O \Rightarrow (E-A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{m-1}.$

8.3 幂等矩阵

$A^2 = A \Rightarrow \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(A-E) = n.$

8.4 幂幺矩阵

$A^m = E \Rightarrow \mathrm{r}(A-E) + \mathrm{r}(A^{n-1} + A^{n-2} + \cdots + E) = n.$

9. 相似 & 合同

- 存在可逆矩阵 U, 使得 $A = U^{\mathrm{T}}U \Leftrightarrow A$ 是正定矩阵.
- 对称矩阵只能与对称矩阵合同.
- 若 A 正定, 则 A^*, A^{-1} 也正定

矩阵多项式秩的和的恒等式

设 $f_A(x)$ 和 $m_A(x)$ 分别为 $A \in \mathbb{P}^{n\times n}$ 的特征多项式和最小多项式, 约定 $d(x) = (f(x), g(x))$, $m(x) = [f(x), g(x)]$ 分别为 $f(x), g(x) \in P[x]$ 的首 1 最大公因式与最小公倍式.

命题

> $g(A)$ 可逆 $\Leftrightarrow (f_A(x), g(x)) = 1$.

注意到 $f_A(A) = O$, 由裴蜀定理即得.

定理 1

> 设 $A \in P^{n\times n}, f(x), g(x) \in P[x]$, 则
> $$\mathrm{r}(f(A)) + \mathrm{r}(g(A)) = \mathrm{r}(d(A)) + \mathrm{r}(m(A)).$$

推论

> 设 $A \in P^{n\times n}, f(x), g(x) \in P[x]$, 且 $f(A) = O$, 则
> $$\mathrm{r}(g(A)) = \mathrm{r}(d(A)).$$

定理 2

> 设 $A \in P^{n\times n}, f(x), g(x) \in P[x]$, 且 $f(A) = O$, 则
> $$g(A) \text{ 可逆 } \Leftrightarrow (d(x), m_A(x)) = 1.$$

推论 1

> $g(A)$ 可逆 $\Leftrightarrow (f_A(x), g(x)) = 1$.

推论 2

> 设 $A \in P^{n\times n}, f(x), g(x) \in P[x]$, 且 $f(A) = O$, 则
> $$g(A) \text{ 可逆 } \Leftrightarrow (d(x), f_A(x)) = 1.$$

定理 3

> 设 $A \in P^{n\times n}, f(x), g(x), h(x) \in P[x], f(x) = m_A(x)h(x)$, 如果 $(h(x), g(x)) = 1$, 则
> $$g(A) \text{ 可逆 } \Leftrightarrow (f(x), g(x)) = 1.$$

推论

> 设 $A \in P^{n\times n}, f(x), g(x) \in P[x], (f(x), g(x)) = 1$, 则有
> $$\operatorname{rank}(f(A)) + \operatorname{rank}(g(A)) = n + \operatorname{rank}(f(A)g(A)).$$

定理 4

> 设 $A \in P^{n\times n}, s, t \in \mathbb{Z}^+, k, l \in P, k \neq l$, 则
> $$\operatorname{rank}(A+kE)^s + \operatorname{rank}(A+lE)^t = n + \operatorname{rank}((A+kE)^s(A+lE)^t)$$

推论

> $$\operatorname{rank}(A^s) + \operatorname{rank}(A-E)^t = n + \operatorname{rank}$$

命题

> 设 $A \in P^{n\times n}, k, s, s-t-1 \in Z^{+}$, 则
> $$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(A^{t}-A^{k+s-1})=\operatorname{rank}(A^{t})+\operatorname{rank}(A-A^{k+s-t})$$

参考文献

矩阵多项式秩的和的恒等式及其应用